PQC & Quantenkryptoanalyse

Marian Margraf

Fraunhofer AISEC, Freie Universität Berlin

profitcard.berlin

Agenda

Stand der Wissenschaft

Herausforderungen

Sicherheit von Post-quantum Crypto

Anzahl benötigter Qubits

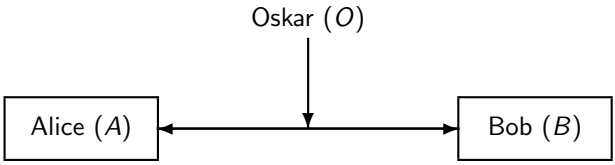
Quantenkryptoanalyse

Kryptoagilität

Handlungsempfehlungen hinsichtlich QC

QC: Auswirkungen auf heute eingesetzte Kryptoverfahren

- Grover-Algorithmus, 1996: Relevant für symmetrische Verfahren wie AES
- Shor-Algorithmus, 1994: Bricht asymmetrische Verfahren wie RSA, DH, DSA, ElGamal



- Authentischer Schlüsselaustausch mit asymmetrischen Verfahren (RSA, DH, ...)
- Sichere Kommunikation mit symmetrischen Verfahren (AES, H-MAC, ...)

- Suche in unsortierter Datenbank mit N Einträgen in $\approx \sqrt{N}$ Schritten
- Anwendung: Suche Schlüssel der Länge n (also 2^n verschiedene Schlüssel)
- Mit Grover in $\approx \sqrt{2^n} = 2^{n/2}$ Schritten
- Gegenmaßnahme: Verdoppelung der Schlüssellänge (128 auf 256 Bit)
- AES-256 einsetzen!

- Faktorisierung von $n = p \cdot q$ in $\approx (\log n)^2 (\log \log n)(\log \log \log n)$ Schritten
- Gegenmaßnahme: Einsatz neuer Kryptoalgorithmen

Laufzeit klassisch vs. QC (Shor)

- Klassische Computer (Number Field Sieve): $\approx 2^{2(\log n)^{1/3}(\log\log n)^{2/3}}$
- Quantencomputer (Shors Algorithmus): $\approx (\log n)^2(\log\log n)(\log\log\log n)$
- Für $n = 2^{4096}$ ($\log n = 4096 = 2^{12}$, $\log\log n = 12 \approx 2^{3,6}$)

$$\text{klassisch: } \approx 2^{2(4.096)^{1/3}(12)^{2/3}} \approx 2^{2\cdot 16\cdot 5} \approx 2^{160}$$

$$\text{QC: } \approx (2^{12})^2 \cdot 2^{3,6} \cdot 2^2 = 2^{2\cdot 12+3,6+2} \approx 2^{30}$$

Laufzeit klassisch vs. QC (Shor)

Computer berechnet $2.000.000.000 \approx 2^{31}$ Operationen pro Sekunde

- Klassisch: $2^{160}/2^{31} = 2^{129}$ Sekunden $= 2^{104}$ Jahre
- QC: $2^{30}/2^{31} = 1/2$ Sekunden
- Alter Universum: $13,8$ Mrd Jahre $\approx 2^{34}$ Jahre

Naheliegende Idee: Erhöhung der Schlüssellänge, aber

- Schlüssel, Ver- und Entschlüsselung müssen effizient berechenbar sein
- Insb. muss aus e der geheime Schlüssel d berechnet werden können
- Laufzeit (Erweiterter Euklidischer Algorithmus): $\approx (\log n)^2$
- Laufzeit Shor-Algorithmus: $\approx (\log n)^2 (\log \log n)(\log \log \log n)$

Laufzeit klassisch vs. QC (Shor)

$$(\log n)^2 \quad \text{versus} \quad (\log n)^2(\log\log n)(\log\log\log n)$$

- Faktorisieren $(\log\log n)(\log\log\log n)$-mal langsamer als Schlüsselberechnung
  - $(\log\log n)(\log\log\log n)$ ist sehr kleine Zahl (selbst für große n)
  - Beispiel: $n = 2^{4096}$: $\log n = 4096 = 2^{12}, \log\log n = 12, \log\log\log n = 3, 6$

Fazit

Arbeitshypothese BSI (für Risikoanalyse): für Kryptoanalyse relevante QC existieren ab ca. 2030

- QC brechen Verfahren, die auf Faktorisierung setzen, vollständig
- Gleiches gilt für Diskreten Logarithmus (DH, DSA, ECDSA)
- Symmetrische Verfahren sind nicht so stark betroffen

Handlungsbedarf

Für langlebige Sicherheit besteht akuter Handlungsbedarf

- Snowden Leaks (2013): NSA forscht an QC
- Store now, decrypt later

Herausforderungen

- Sind die neuen Kryptoverfahren wirklich sicher?
- Lassen sich die bekannten Quantenalgorithmen verbessern?
- Gibt es weitere Quantenalgorithmen für die Kryptoanalyse?
- Migration hin zu Post-quantum Kryptographie
- Neues Paradigma: Kryptoagilität

NIST Competition Post-Quanten-Kryptographie

- 2016: Call of Proposals
- In 2022 zwei PQC-Verfahren gebrochen
  - Rainbow (multivariate Polynomsystem), Kandidat bis Ende Runde 3 (Beullens[1])
  - SIKE (isogeniebasiert): Kandidat Runde 4 (Castryck, Decru[2])
- Notwendige Maßnahmen:
  - Hybride Verfahren (z.B. RSA/Kyber)
  - Kryptoagilität

[1] Breaking Rainbow Takes a Weekend on a Laptop

[2] An Efficient Key Recovery Attack on SIDH

Beispiel RSA, wir wollen Modul $N = p \cdot q \approx 2^n$ faktorisieren

- 1994, Shor : $3n$ Qubits
- 2000, Seifert[3]: $\approx 2n$ Qubits
- 2017, Ekerå, Håstad[4]: $(3/2 + o(1))n$
- 2019, Gidney, Ekerå[5]: Faktorisieren mit physikalischen an Stelle von logischen Qubits
- 2021 May, Schlieper[6]: $(1/2 + o(1))n$
- 2022, Yan et al. Dezember[7]: $n/\log n$???

[3] Using fewer Qubits in Shor's Factorization Algorithm via Simultaneous Diophantine Approximation
[4] Quantum algorithms for computing short discrete logarithms and factoring RSA integers
[5] How to factor 2048 bit RSA integers in 8 hours using 20 million noisy qubits
[6] Quantum Period Finding is Compression Robust
[7] Factoring integers with sublinear resources on a superconducting quantum processor

Quantenkryptoanalyse

- Shor (Faktorisierung, Logarithmus)
- Grover (Schlüsselsuche)
- Simon (bestimmte Hashfunktionen)
- HHL (algebraische Attacken)?

Was kommt da noch?

Klassische Kryptoanalyse

Sei $E : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^t \longrightarrow \{0,1\}^n, (m,k) \mapsto c$ Verschlüsselungsfunktion Known Plaintext Attack:

Wir kennen $m = (m_1, \ldots, m_{128})$ und $c = (c_1, \ldots, c_{128})$ mit $c = E(m,k)$

Multivariates Polynomsystem
in der UnbekaNnten $k = (k_1, \ldots, k_{128})$

$$
\begin{aligned}
m_1 m_5 m_{13} c_4 c_{120} k_7 k_{50} \oplus \cdots \oplus m_{38} c_{97} c_{100} c_{112} k_7 k_{23} k_{47} k_{101} &= 0 \\
m_{17} m_{66} c_{13} c_{76} c_{120} k_{15} k_{55} \oplus \cdots \oplus m_8 c_{43} c_{100} c_{87} k_{13} k_{67} k_{90} k_{101} &= 0 \\
m_5 m_{48} m_{53} c_9 c_{16} k_7 k_{50} \oplus \cdots \oplus m_{87} c_{97} k_7 k_{23} k_{35} k_{42} k_{47} k_{101} &= 0 \\
&\vdots \\
m_{45} m_{72} m_{99} c_{67} c_{120} k_{30} k_{53} \oplus \cdots \oplus m_{23} c_{58} c_{127} c_{128} k_{13} k_{67} k_{90} k_{101} &= 0
\end{aligned}
$$

Linearisierung: Lineares GS in den
Unbekannten $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $N \leq 2^{128}$

$$
\begin{aligned}
m_1 m_5 m_{13} c_4 c_{120} x_1 \oplus \cdots \oplus m_{38} c_{97} c_{100} c_{112} x_t &= 0 \\
m_{17} m_{66} c_{13} c_{76} c_{120} x_s \oplus \cdots \oplus m_8 c_{43} c_{100} c_{87} x_u &= 0 \\
m_5 m_{48} m_{53} c_9 c_{16} x_1 \oplus \cdots \oplus m_{87} c_{97} x_v &= 0 \\
&\vdots \\
m_{45} m_{72} m_{99} c_{67} c_{120} x_w \oplus \cdots \oplus m_{23} c_{58} c_{127} c_{128} x_u &= 0
\end{aligned}
$$

Das linearisierte Gleichungssystem ist exponentiell groß

HHL-Algorithmus

- Entwickelt 2008 von Harrow, Hassidim, Lloyd[8]
- Berechnet Quantenzustand des Lösungsvektors eines linearen GS in Zeit $\mathcal{O}(\log(N)\kappa^2)$
  N Anzahl der Variablen, κ Konditionszahl, GS muss dünn besetzt sein
- Frage: Lässt sich HHL für algebraische Kryptoanalyse einsetzen?
  - Gao et al.[9]: Laufzeit für AES-128 $\mathcal{O}(2^{73}\kappa^2)$
- Wie groß ist κ: Konditionszahl ist ein Maß der Störanfälligkeit des linearen GS
  - Bei Kryptoverfahren sollte die Störanfälligkeit sehr groß sein
  - Avalanche-Kriterium: Änderung eines Eingabebits ändert 50% der Ausgabebits
  - Wir schätzen bei AES-128: $\kappa > 2^{50}$

[8] Quantum algorithm for solving linear systems of equations
[9] Quantum Security of AES-128 under HHL Algorithmen

Sei $E : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^t \longrightarrow \{0,1\}^n, (m,k) \mapsto c$ Verschlüsselungsfunktion

- Finde $\alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \times \{0,1\}^t$ mit

$$\Pr_{m,k}[\alpha \bullet m \oplus \beta \bullet E(m,k) = \gamma \bullet k] \geq 1/2 + \varepsilon \quad (x \bullet y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \bmod 2)$$

- Known Plaintext Attack: N bekannte Paare $(m^i, c^i = E(m^i, k)), i \leq N$
  - Berechne $\alpha \bullet m^i \oplus \beta \bullet c^i \in \{0,1\}$ für alle $i \leq N$, sei s Anzahl der Einsen
  - Setze $\gamma \bullet k = 1$, wenn $s > N/2$, sonst 0 (Majoritätsentscheidung)
  - Damit erhalten wir 1 Bit Information über k

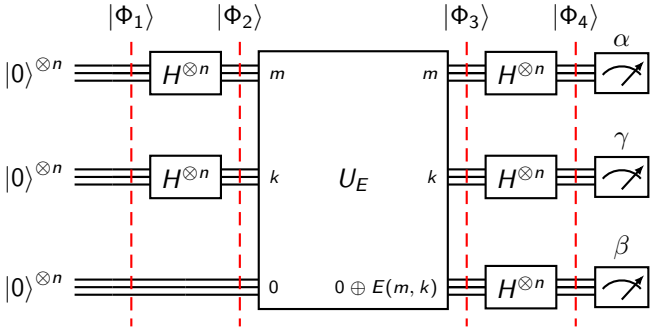
Offensichtlich: Je größer ε, desto weniger Plain-/Ciphertextpaare werden benötigt

Sei $E : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^t \longrightarrow \{0,1\}^n, (m,k) \mapsto c$ Verschlüsselungsfunktion

- Finde $\alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \times \{0,1\}^t$ mit

$$\Pr_{m,k}[\alpha \bullet m \oplus \beta \bullet E(m,k) = \gamma \bullet k] \geq 1/2 + \varepsilon \quad (x \bullet y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \bmod 2)$$

- Betrachte $\chi_E(\alpha, \beta, \gamma) := \sum_{m,k} (-1)^{\alpha \bullet m \oplus \beta \bullet E(m.k) \oplus \gamma \bullet k}$
- Es gilt $-2^{n+t} \leq \chi_E(\alpha, \beta, \gamma) \leq 2^{n+t}$
- Wie finden wir (α, β, γ) so, dass $|\chi_E(\alpha, \beta, \gamma)|$ groß ist? Es gibt $2^n 2^n 2^t$ Kandidaten.


$|\Phi_1\rangle$
$|\Phi_2\rangle$
$|\Phi_3\rangle$
$|\Phi_4\rangle$
$|0\rangle^{\otimes n}$
$|0\rangle^{\otimes n}$
$|0\rangle^{\otimes n}$
$H^{\otimes n}$
$H^{\otimes n}$
$H^{\otimes n}$
$H^{\otimes n}$
$H^{\otimes n}$
m
k
0
m
k
U_E
$0 \oplus E(m,k)$
α
γ
β

Lineare Kryptoanalyse

$$
\begin{aligned}
|0\rangle\,|0\rangle\,|0\rangle \quad & \xrightarrow{H^{\otimes n}\otimes H^{\otimes t}\otimes \mathrm{Id}} \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{m=0}^{2^n-1}|m\rangle\,\frac{1}{\sqrt{2^t}}\sum_{k=0}^{2^t-1}|k\rangle\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\frac{1}{\sqrt{2^t}}\sum_{m=0}^{2^n-1}\sum_{k=0}^{2^k-1}|m\rangle\,|k\rangle\,|0\rangle \\
& \xrightarrow{U_E} \frac{1}{\sqrt{2^{n+t}}}\sum_{m=0}^{2^n-1}\sum_{k=0}^{2^k-1}|m\rangle\,|k\rangle\,|0\oplus \underbrace{E(m,k)}_{=c}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n+t}}}\sum_{m=0}^{2^n-1}\sum_{k=0}^{2^k-1}|m\rangle\,|k\rangle\,|c\rangle \\
& \xrightarrow{H^{\otimes n}\otimes H^{\otimes t}\otimes H^{\otimes n}} \frac{1}{\sqrt{2^{n+t}}}\sum_{m=0}^{2^n-1}\sum_{k=0}^{2^k-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{\alpha=0}^{2^n-1}(-1)^{m\bullet\alpha}\,|\alpha\rangle\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{\gamma=0}^{2^t-1}(-1)^{k\bullet\gamma}\,|\gamma\rangle\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{\beta=0}^{2^n-1}(-1)^{E(m,k)\bullet\beta}\,|\beta\rangle\right) \\
& = \frac{1}{\sqrt{2^{n+t}}}\frac{1}{\sqrt{2^{3n}}}\sum_{m=0}^{2^n-1}\sum_{k=0}^{2^k-1}\sum_{\alpha=0}^{2^n-1}\sum_{\gamma=0}^{2^t-1}\sum_{\beta=0}^{2^n-1}(-1)^{m\bullet\alpha}\,|\alpha\rangle\,(-1)^{k\bullet\gamma}\,|\gamma\rangle\,(-1)^{E(m,k)\bullet\beta}\,|\beta\rangle \\
& = \frac{1}{\sqrt{2^{n+t}}}\frac{1}{\sqrt{2^{3n}}}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\sum_{m,k}(-1)^{\alpha\bullet m\oplus\beta\bullet E(m,k)\oplus\gamma\bullet k}\,|\alpha\beta\gamma\rangle
\end{aligned}
$$

Zusammenfassung:

- Wir suchen α, β, γ mit $|\chi_E(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{m,k}(-1)^{\alpha \bullet m \oplus \beta \bullet E(m.k) \oplus \gamma \bullet k}|$ groß
- Berechne effizient Quantenzustand $\frac{1}{\sqrt{2^{n+t}}} \frac{1}{\sqrt{2^{3n}}} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \sum_{m,k} (-1)^{\alpha \bullet m \oplus \beta \bullet E(m,k) \oplus \gamma \bullet k} |\alpha\beta\gamma\rangle$
- Messen eines Zustands $\sum_{i=0}^{2^n} a_i |i\rangle$: Wir erhalten $|i\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $|a_i|^2$
- Also: $|\alpha\beta\gamma\rangle$ wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^{n+t}} \frac{1}{2^{3n}} |\chi_E(\alpha,\beta,\gamma)|^2$ gemessen

Hidden Subgroup Problem (HSP)

Sei G eine Gruppe, $H \leq G$ eine Untergruppe, X eine Menge.

- $f : G \longrightarrow X$ versteckt die Gruppe H, wenn f.a. $g_1, g_2 \in G$ gilt

$$f(g_1) = f(g_2) \iff g_1 H = g_2 H$$

- Faktorisierung, Logarithmus lassen sich auf das HSP für **abelsche** Gruppen reduzieren
- Für abelsche Gruppen existiert ein QA für das Hidden Subgroup Problem
- Wir kennen für einige nichtabelsche Gruppen ebenfalls effiziente Quantenalgorithmen
- Auch Gitterprobleme lassen sich auf das HSP reduzieren
  - Allerdings für Gruppen, für die noch kein eff. Quantenalgorithmus bekannt ist

Sind wir nahe dran, Gitterprobleme zu brechen?

Bei Neu- und Weiterentwicklung

- Flexible Gestaltung der eingesetzten kryptographischen Verfahren
- Ziel: Es muss einfach möglich sein
  - Schlüssellängen und sonstige Parameter zu vergrößern
  - kryptographischen Verfahren, die nicht mehr sicher sind, auszutauschen

- Implementierung mehrerer Kryptoalgorithmen
- Implementierung mehrerer Schlüssellängen
- Variable Größe der Kommunikationsschnittstellen
  (Nachrichten sind bei verschiedenen Algorithmen unterschiedlich)
- Protokolle müssen Namen des Kryptoalgorithmus enthalten

- Kommunikationspartner handeln zu Beginn Cipher-Suite aus
- Dadurch können Nutzer nach und nach migriert werden
- Migrierte Nutzer können weiterhin mit nichtmigrierten Nutzern kommunizieren

QC: Handlungsempfehlungen

Umsetzung von Kryptoagilität erfordert häufig Neuentwicklung

- Dann könnte gleich PQC eingesetzt (und auf Agilität verzichtet) werden
- Aber:
  - PQC-Verfahren sind noch relativ neu
    (insb. performante Verfahren sind noch nicht ausreichend untersucht)
  - Kryptoagilität ist nicht nur für Bedrohungen durch Quantencompter relevant
  - Kryptoanalyse kann sich für alle eingesetzten Verfahren sprunghaft verbessern

QC: Handlungsempfehlungen

- Signaturverfahren: LMS, XMSS (z.B. für Software-Updates)
  - Standardisiert und resistent gegen QC
  - Nachteil: zustandsbehaftet
- Schlüsseleinigung: Hybride Verfahren
  - Kombination von klassischen mit quantencomputerresistenten Verfahren
  - BSI Empfehlung für PQC-Anteil: Classic McEliece, FrodoKEM

Auswahl Experise

Freie Universität Berlin	Fraunhofer AISEC	SSE
Research Group IT-Security	Department Secure Systems	Secure Systems Engineering
Theoretische Grundlagen 6 wissenschaftliche MA	Transfer in die Praxis 20 wissenschaftliche. MA	ITSec-Beratung & Umsetzung 12 MA
Krypto, inbs. PQC, Krypotanalyse, Quantenalgorithmen	Usable Privacy & Security, Applied Crypto, eID, ISMS	Sichere Umsetzung großer Infrastrukturprojekte
BMBF, SprinD, Cyberagentur	BSI, BMI, BDr, VW, Governikus, Utimaco, Genua, ...	Maut, Verimi, Luca App (nach Bekanntwerden der Sicherheitslücken)